Уважаемые коллеги!

Система оценки решений задач: каждая задача, независимо от ее трудности, оценивается из 7 баллов и *каждая оценка должна быть целым числом, не меньшим 0 и не большим 7*. При оценке решения по такой системе сначала дается ответ на принципиальный вопрос: верное оно (хотя, может быть, и с различными недостатками) или неверное (хотя, может быть, и с существенным продвижением). В первом случае оценка не должна быть ниже 4, во втором - выше 3.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕРКЕ И ОЦЕНКЕ ОЛИМПИАДНЫХ РАБОТ

1. *Решение каждой задачи оценивается из 7 баллов. Жюри не имеет права изменять цену задачи.* В случаях, не предусмотренных прямо дополнительными указаниями по проверке и оценке задачи, её решение оценивается по следующим общим правилам:

Оценка	*За что ставится*
7	Верное решение
6	Верное решение с недочетами
4-5	Решение в основных чертах верно, но неполно или содержит непринципиальные ошибки
1-3	Решение в целом неверно, но содержит более или менее существенное продвижение в верном направлении
0	Решение неверно или отсутствует

Решение считается *неполным* в следующих случаях:

- если оно содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;
- если оно при верной общей схеме рассуждений содержит пробелы, т.е. явно или скрыто опирается на недоказанные утверждения, которые нельзя счесть известными или очевидными;
- если оно требует разбора нескольких возможных случаев, большая часть которых разобрана, но некоторые упущены.

2. При оценке решений на олимпиаде учитываются *только их правильность, полнота, обоснованность, идейность и оригинальность*. Нельзя

снижать оценку за "нерациональность" решения (кроме отдельных редких случаев, когда такое прямо предусмотрено дополнительными указаниями по проверке данной задачи). ***Ни при каких обстоятельствах нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки и т.п.*** .

3. Оценивая олимпиадные работы, следует отличать принципиальные (прежде всего - логические) ошибки от технических (каковыми являются, например, вычислительные ошибки в невычислительной задаче). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочётам.

4. Мы постоянно ориентируем школьников на необходимость обоснования решений. Но при этом не следует требовать большего уровня строгости, чем принято в обычной школьной практике для соответствующего класса. Умение хорошо изложить решение надо поощрять, но умение хорошо *догадываться*, на олимпиаде всё же должно цениться выше.

Если участник владеет нужным обоснованием, но не может связно изложить его, *роль обоснования могут в известной мере сыграть черновые записи и рисунки, раскрывающие ход мысли автора*. Поэтому при проверке надо ***просматривать все черновики***, причём недостатки, которых нет в чистовике, не учитываются, но учитывается всё, что может улучшить чистовик.

5. Ответ, найденный логическим путём, обычно оценивается выше, чем найденный слепым подбором.

Решения 6 класс

Задача 1. *Одно натуральное число поделили с остатком на другое. Делимое оканчивается на 1, делитель и частное – на 9. Может ли остаток оканчиваться на 6?*

Ответ: **Не может**. ***Решение.*** Если делитель и частное оканчиваются на 9, то их произведение оканчивается на 1. Прибавив к этому произведению остаток, мы должны получить делимое, которое тоже оканчивается на 1. Поэтому остаток должен оканчиваться не на 6, а на 0.

Задача 2. *Петя ехал в поезде. Сначала он читал книгу, затем – отдыхал, потом – смотрел в окно, а после – пил чай. На каждое из этих занятий, кроме первого, у Пети ушло вдвое меньше времени, чем на предыдущее. Начал читать книгу он в полдень, а закончил пить чай в час дня. Сколько было времени, когда Петя начал смотреть в окно?*

Решение. Примем за условную единицу время, в течение которого Петя пил чай. Тогда в окно он смотрел две таких единицы времени, отдыхал четыре единицы времени и читал книгу восемь единиц времени. Стало быть, на все эти занятия вместе у него ушло $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ единиц времени, что по условию составляет 1 час. Значит, наша единица времени составляет 1/15 часа или 4 минуты. С полудня до момента, когда Петя начал смотреть в окно, прошло $8 + 4 = 12$ таких единиц или $12\times4=48$ минут. Итак, **Петя начал смотреть в окно в 12 часов 48 минут**.

Задача 3. *В чемпионате Летней математической школы по "Брейн-рингу" первые четыре места заняли команды "Синус", "Косинус", "Тангенс" и "Котангенс". При этом оказалось, что сумма мест, занятых "Тангенсом", "Котангенсом" и "Синусом", равна 6, сумма мест команд "Косинус" и "Синус" тоже равна 6, и "Синус" выступил лучше "Тангенса". Какая команда какое место заняла? Объясните, как Вы рассуждали.*

Решение. Сначала заметим, что команды "Тангенс", "Котангенс" и "Синус" заняли первые три места: иначе сумма занятых ими мест была бы больше 6. Значит, **"Косинус"** занял **четвертое место**. Стало быть, **"Синус"**, место которого в сумме с местом "Косинуса" дает 6, занял **второе место**, а **"Тангенс"**, выступивший хуже "Синуса" – **третье**. **"Котангенсу"**, следовательно, остается **первое место**.

Задача 4. *И сказал Кощей Ивану-царевичу: "Вот тебе два одинаковых листа: оба в форме треугольника с равными сторонами. Каждый разлинован на 16 одинаковых треугольничков (***Рис. 1***). Сначала ты вырежешь из одного листа несколько фигур общей площадью в 15 треугольничков. Потом я отмечу один из треугольничков второго листа, а ты должен будешь наложить свои фигуры на него так, чтобы они полностью закрывали все его треугольнички, кроме отмеченного. Обойдешься тремя фигурками – отпущу с миром. Обойдешься четырьмя или пятью – будешь у меня свинопасом. А ежели и пятью не обойдешься – голова с плеч!" Сможет ли Иван наверняка остаться в живых? А уйти с миром?*

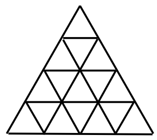

Рис. 1

Решение. Иван **сможет уйти с миром**, если вырежет три фигуры так, как показано на Рис. 2. Сначала он наложит на второй лист самую большую из своих фигур так, чтобы отмеченный треугольничек остался непокрытым (нетрудно убедиться, что это всегда возможно). Чтобы оставить непокрытым угловой треугольничек, Иван вложит маленькую треугольную фигурку в выемку средней по величине фигуры, а среднюю фигуру – в выемку большой. Во всех остальных случаях он накроет маленькой фигуркой угловой треугольничек, а среднюю фигурку положит так, чтобы ее выемка оказалась над отмеченным треугольничком.

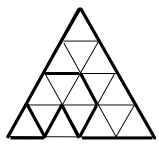

Рис. 2

Задача 5. *Можно ли вписать в каждую клетку таблицы размером 4×6 по натуральному числу так, что все эти числа были различны, каждое было не больше 30, и любые два числа, стоящие в клетках с общей стороной, имели общий делитель, больший единицы? Если да, то как? Если нет, то почему?*

Ответ: **Нельзя**. ***Решение.*** Каждая клеточка в таблице граничит по сторонам самое меньшее с двумя другими. Поэтому числа 1, 17, 19, 23, 29, 11 и 13 для таблицы не годятся: первые пять из них вообще не имеют среди чисел от 1 до 30 возможных соседей, а последние два имеют лишь по одному возможному соседу (22 для 11 и 26 для 13). Остаются 23 числа, которых не хватит на 24 клеточки.

Решения 7 класс

Задача 1. *Какой угол образуют стрелки часов в 12 часов 20 минут?*

Ответ: **110°**. ***Решение.*** В 12.00 стрелки часов сходятся вместе. После этого за 20 минут минутная стрелка проходит 1/3 окружности, т.е. описывает угол в 120°. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной (т.к. описывает один круг за 12 часов). Поэтому она за 20 минут опишет угол в 120°:12 = 10° и будет образовывать с минутной стрелкой угол в 120° – 10° = 110°.

Задача 2. *Банк ОГОГО меняет рубли на тугрики по 3000 рублей за тугрик, и еще берет 7000 рублей за право обмена независимо от меняемой суммы. Банк ЙОХОХО берет за тугрик 3020 рублей, а за право обмена берет 1 тугрик (тоже независимо от меняемой суммы). Турист установил, что ему все равно, в каком из банков менять деньги. Какую сумму он собирается менять?*

Ответ: **604000 руб.** ***Решение.*** Если у туриста было X рублей, то в банке ОГОГО он получит за них (X– 7000)/3000 тугриков, а в банке ЙОХОХО X/3020 – 1 тугриков. Решая уравнение (X– 7000)/3000 = X/3020 – 1 , получаем $\mathbf{X}$ **= 604000** (руб.).

Задача 3. *a, b и c – три различные цифры, отличные от нуля. Если сложить все шесть двузначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, получится 176. Найдите эти цифры (укажите все возможные варианты).*

Ответ:* 1, 2, 5 или 1, 3, 4. *Решение. Запишем сумму указанных в условии двузначных чисел: $\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{cb}$ = $(10a+b) + (10a+c) + (10b+a) + (10b+c) + (10c+a) + (10c+b) = 22(a+b+c)$.По условию $22(a+b+c) = 176$, откуда $a+b+c = 8$. Теперь задача свелась к такой*: найти все наборы из трех различных ненулевых цифр, сумма которых равна 8*. Будем считать, что через a обозначена самая маленькая из цифр, через b – средняя по величине, через c – наибольшая. Тогда $a = 1$ (так как даже 2+3+4 > 8), следовательно, $b + c = 7$. Этому равенству удовлетворяют две пары цифр: $b = 2$, $c = 5$ и $b = 3$, $c = 4$. Таким образом, **искомыми цифрами могут быть 1, 2, 5 или 1, 3, 4**.

Задача 4. *Из четырех внешне одинаковых монет две весят по 10 г, а две другие – по 9 г. Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс грузов, положенных на чашки. Как за одно взвешивание найти хотя бы одну десятиграммовую монету?*

Решение. Положим на левую чашку весов две монеты, а на правую – одну. Возможны такие случаи:

Слева	*Справа*	*Оставшаяся монета*	*Показание стрелки*
10 + 10	9	9	11
10 + 9	9	**10**	10
10 + 9	**10**	9	9
9 + 9	**10**	**10**	8

Таким образом, по показанию стрелки мы можем однозначно определить, с каким из четырех возможных случаев мы имеем дело. Осталось заметить, что в каждом из этих случаев нужная монета без труда находится (отмечено в таблице жирным шрифтом).

Задача 5. *Можно ли расположить в кружочках на Рис. 3 натуральные числа от 1 до 11 так, чтобы суммы трех чисел на каждом из пяти выходящих из центра отрезков равнялись одному и тому же числу А, а суммы пяти чисел в вершинах внутреннего и внешнего пятиугольников равнялись одному и тому же числу В? Если да, то как? Если нет, то почему?*

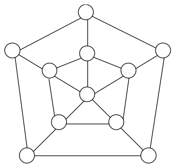

Рис. 3

Решение. Покажем, что расставить числа требуемым образом **нельзя**. Допустим, это удалось. Обозначим через X число, стоящее в центральном кружочке. Все остальные числа стоят в кружочках, образующих два пятиугольника. Поэтому $X+2B$ = 1+…+11 = 66, откуда $X = 66–2B$. Значит, число X должно быть четным. Теперь сложим все суммы чисел, стоящих на выходящих из центра отрезках. Получится $5A$. При этом число X будет сосчитано пять раз, а все остальные – по одному разу. Поэтому $5A = 4X+(1+…+11) = 4X+66$ (*). Значит, число $4X+66$ должно делиться на 5. Этому условию среди чисел от 1 до 11 удовлетворяют только числа 1, 6 и 11, и при этом только число 6 четно. Следовательно, $X = 6$. Подставляя найденное значение X в уравнение (*), находим, что $A=18$. Стало быть, на каждом из пяти выходящих из центра отрезков сумма двух чисел, стоящих там вместе с числом X, должна равняться 18 – 6 = 12. Получается, что на одном отрезке должны стоять числа 1 и 11, 2 и 10, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7. Заметим, что три из пяти перечисленных пар состоят из нечетных чисел, а две – из четных. Поэтому в вершинах каждого из двух пятиугольников должны стоять три нечетных и два четных числа. Это означает, что число B должно быть нечетным. Но из доказанного выше равенства $X = 66–2B$ при $X = 6$ получаем $B = 30$. Противоречие.

Решения 8 класс

Задача 1. *Самолет вылетел из Москвы в час ночи по московскому времени и прибыл в город N в семь утра того же дня по местному времени. Назад он вылетел в полдень по местному времени и прибыл в Москву в 14.00 того же дня по московскому времени. Оба перелета длились одинаково. Сколько времени продолжался каждый перелет?*

Ответ: **4 часа.** ***Решение.*** Заметим, что между вылетом самолета из Москвы и его возвращением в Москву прошло 13 часов, из которых он 5 часов провел в городе N. Значит, в воздухе самолет провел 8 часов, а каждый из перелетов длился **по 4 часа**.

Задача 2. *Петя проснулся в восьмом часу утра и заметил, что часовая стрелка его будильника делит пополам угол между минутной стрелкой и показывающей на цифру 8 стрелкой звонка. Через какое время должен прозвенеть звонок?*

Ответ: **24 минуты.** ***Решение.*** Пусть Петя проснулся в 7 часов x минут. Часовая стрелка движется в 12 раз медленнее минутной. Поэтому в этот момент она находилась на $35 + x/12$ минут. Но часовая стрелка находится между x и 40 минутами ровно посередине. Получаем уравнение $(35 + x/12) - x = 40 - (35 + x/12)$, откуда x=36. Значит, до звонка осталось $60 - x =$ **24 минуты**.

Задача 3. *Два равносторонних треугольника, периметр одного из которых равен 6 см, а периметр другого – 9 см, ограничивают шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны (Рис. 4). Найдите периметр шестиугольника*

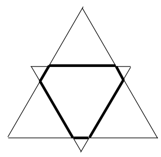

Рис. 4

Ответ: **5 см.** ***Решение.*** Сумма длин всех линий на Рис. 4 равна сумме периметров двух исходных треугольников, т.е. 6 + 9 = 15 см. При этом все линии на рисунке можно соединить в шесть равносторонних треугольников, у каждого из которых одна сторона изображена жирной линией, а две другие – тонкими. Таким образом, сумма длин тонких линий вдвое больше суммы длин жирных, т.е. периметра шестиугольника. Значит, периметр шестиугольника составляет треть от 15 см, т.е. **равен 5 см**.

Задача 4. *Парус имеет вид четырехугольника ABCD, углы A, C* и *D которого равны 45°. Найдите площадь паруса, если BD = 4 м.*

Ответ: **8 м^2.** ***Решение.*** Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке K (Рис. 5). В треугольнике ADK углы A и D равны 45°, поэтому $CD \perp AB$, а треугольники ADK и CBK – прямоугольные равнобедренные. Положим $AK = DK = a$, $BK = CK = b$. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ADK и CBK, т.е. $a^2/2 + b^2/2$. За-

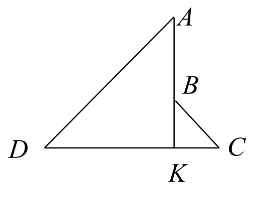

Рис. 5

метим теперь, что из прямоугольного треугольника DKB имеем $DB^2 = DK^2 + KB^2 = a^2+b^2$. Таким образом, **площадь четырехугольника равняется $DB^2/2$, т.е 8 *м*^{2}**.

Задача 5. *Если в словах ХУЛИГАН и ПАИНЬКА все буквы заменить цифрами (одинаковые – одинаковыми, разные – разными), получатся два "цифровых слова", из семи цифр каждое. Непорядком назовем пару соседних цифр одного из этих "слов", в которой левая цифра больше. Какое наименьшее суммарное число непорядков может быть в получившихся "словах"?*

Ответ: **два**. ***Решение.*** Вот пример, когда непорядков ровно два: ХУЛИГАН = 3456789, ПАИНЬКА = 1869028. Покажем, что меньше двух непорядков быть не может. Первый из них обязательно есть либо на отрезке ИГА слова ХУЛИГАН, либо на отрезке АИ слова ПАИНЬКА. Действительно, пусть в слове ХУЛИГАН на отрезке ИГА непорядков нет. Тогда И < Г < А. Но тогда А > И, т.е. пара цифр АИ образует непорядок в слове ПАИНЬКА. Аналогично убеждаемся, что второй непорядок есть либо на отрезке НЬКА слова ПАИНЬКА, либо на отрезке АН слова ХУЛИГАН.